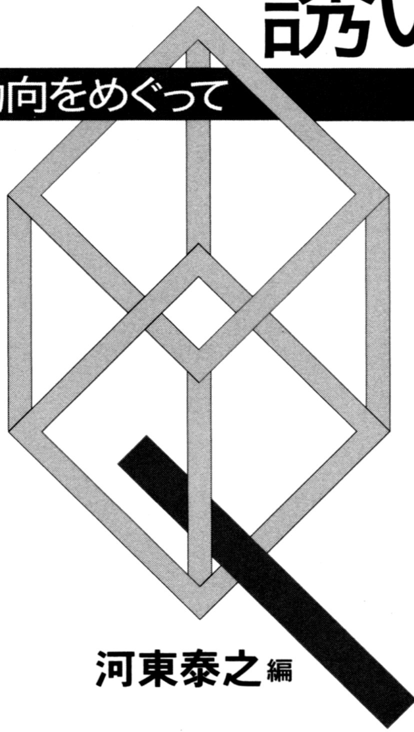
数理物理への誘い5

最新の動向をめぐって



河東泰之 編

遊星社

数理物理への誘い５

目　　次

装丁＝海保　透

●既刊の内容

【第1集】

【第2集】

【第３集】

【第４集】

まえがき

サマースクール数理物理は，1987年に荒木不二洋，江沢洋両先生によって始められ，2001年までほぼ毎年，学習院大学で開催されてきた．2002年より小嶋泉先生と私が担当を引き継ぎ，現在では会場を東京大学（駒場キャンパス）に移して開催されている．「これから研究を始めようとしている大学院生や，数理物理の広い分野にわたる（専門外の）研究者を対象とする入門的な講義を行う」というのが趣旨であるが，『数学セミナー』や『数理科学』にも案内を出し，学部学生，企業研究者，高校教諭や一般社会人まで広い範囲の参加者を集めるユニークな催しである．通常4人の講演者にそれぞれ，90分講演を3回ずつしていただいているのだが，あらかじめかなり詳しい予稿を書いていただき，それを会場で配布するというのが伝統になっており，予稿集は例年，合計百数十ページに及ぶ立派なものとなっている．その予稿集を元に，一般向けの原稿として書き直していただいたものが，これまで「数理物理への誘い 1〜4」として遊星社から出版されており，本書はその続巻として，2002年からの新しい講義に基づいてまとめられたものである．

上にも書いたように，大変幅広い範囲から参加者が集まることがこのサマースクールの特徴の一つであり，この点で一般の研究集会と異なっている．テーマにかかわりなく毎年出席しているという固定ファンも少なくない．このサマースクールは，これからもしばらくは毎年8月ないし9月に東京大学駒場キャンパスで開催していく予定であり，下記のウェブページにこれまでの情報，これからの予定が掲載されているので，最新の情報についてはこちらをご覧いただきたい．

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/mp-old.htm

本書に収録した各篇の内容について簡単に説明しておこう．

第1～4話は，2003年開催のサマースクール「流体力学・乱流の数理」での講義に基づく．蛇口から水を勢いよく流せば水の様子は大変複雑なものとなるが，これが乱流の一つの例である．流体の運動法則はナヴィエ・ストークス方程式で記述されるので，それに基づいて各点各時刻における流体の速度を解析すればよい，といっても実際上それは不可能である．そこでさまざまな数学的な道具を使って解析を行うことになる．本書ではこのサマースクールにおける講演に基づく4篇すべてを収録することができた．

第1話の木田重雄先生の「乱流の摂動理論」は，流体の平均速度場を解析する際に現れる，非線形効果が大きい運動方程式の取り扱い方について解説したものである．瞬間速度場に代わって平均速度場を導入することから始まり，一様乱流の場合のエネルギースペクトル関数が説明される．その後の非線形系の取り扱いは摂動理論によるのであるが，古典的な摂動理論の解説から始めて順を追ってていねいな説明がなされている．

有光敏彦・有光直子先生の「乱流のマルティフラクタル解析」は，乱流を統計力学的に扱うアンサンブル的方法の一つとして最近発展している，マルティフラクタル解析の解説である．この方法はナヴィエ・ストークス方程式の尺度変換不変性から生じる特異性の強度が実空間にマルティフラクタル分布している，という仮定から出発する．これによって確率密度関数のより深い解析が可能になる．A&A モデルと呼ばれる具体的なモデルのシミュレーションとの比較も行われている．

小川知之先生の「周期波の弱非線形解析」では，一様状態が不安定化する際に現れる状態を研究する一般的手法が解説されている．この方法が題名にある弱非線形解析であり，局所分岐解析とも言う．偏微分方程式のパターン形成を数学的に調べる方法が解説されている．これはさまざまなパターン形成の問題の研究に有用である．反応拡散系の具体例に始まり，臨界点の説明の後，周期パターンの分岐理論，臨界点まわりの解析が解説される．

福本康秀先生の「オイラー・ポアンカレ形式による渦のトポロジーと力学」では，流体力学を新しい枠組みから解説している．タバコの煙，台風など渦巻き構造は身の回りにたくさん現れる．渦巻き模様の芯(しん)の部分が渦である．題名のオイラー・ポアンカレ形式は，ある変分原理のことであり，渦をこの立場から解析して，運動方程式に基づく力学的属性と，任意の流体運動において不変な位相不変量の違いを明らかにしている．位相不変量である，循環とヘリシティから始まり，ヘルムホルツの法則，ケルヴィンの循環定理がまず示され，その後変分原理としての見方が明らかにされる．

次の第5～6話は，2002年開催のサマースクール「非可換幾何学と数理物理」からのものである．作用素環論でフィールズ賞を取ったコンヌは1980年代から，幾何学の非可換化，さらには整数論から素粒子理論に及ぶあらゆる数学，物理学の理論にそれを応用することを精力的に研究してきている．近年，弦理論において，非可換幾何学が自然に現れることがわかって多くの研究者の注目を集めており，このテーマの研究はすさまじい勢いで進展している．ここではこの年の講義から次の2本を収録した．

夏目利一先生の「非可換幾何学の不思議な世界」は，コンヌの非可換幾何学についての初歩から始まる入門的解説であり，C^*-環に基づく非可換多様体の考え方から，それらを研究する道具である K-群，サイクリックコホモロジーが説明され，量子ホール効果を例にとった物理学への応用までが説明されている．

綿村哲先生の「非可換空間上のゲージ理論」では，弦理論に代表される物理学における，非可換幾何学の役割が解説されている．なぜ物理学においてそのような考え方が自然に必要になるのかから始まって詳しい説明があり，数学的な枠組みの説明の後，N 点空間上の微分幾何学が解説される．そして，lattice（格子）の場合とそのゲージ理論が紹介されている．

第7話の盛田健彦先生の「エントロピー・リャプノフ指数・SBR測度」は，荒木，江沢両先生の担当であった2001年のサマースクール「非平衡統計力

学の現在」からのものであるが，荒木，江沢両先生から了解をいただいて本書に収録することになった．このサマースクールでは，非平衡統計力学の最近の発展についてさまざまな立場からの解説が行われた．

盛田健彦先生の解説は，可微分力学系のエルゴード理論を背景とした非平衡統計力学の新しい発展の解説である．この理論は高度な数学理論に基づいているため，統計力学の立場から最近の研究を理解したいと考えても，なかなか容易なことではなかった．本稿では，数学としての力学系理論の初歩から始めて，エントロピー，リャプノフ指数の解説があり，Pesin 理論が紹介される．そして，非平衡定常状態として重要な役割を果たす Sinai-Bowen-Ruelle (SBR) 測度が詳しく解説されている．

このサマースクールは，幅広いテーマを幅広い聴衆に向かって発信する内容になっている．サマースクールそのものにもより多くの方々に参加していただきたいと思っているが，時間的，場所的な制約からやはり出席できる人の数は限られているし，サマースクールの後何年もたってからその内容に興味を持つ若い方もおられるであろう．したがって，より広い範囲の読者に届くように，このような単行本の形で出版されることは大変意義深いことと考えている．各稿にはそれぞれ参考文献表もついているので，より深いことを勉強したいと思った際に有用であろう．話題によっては，最近の研究成果の大半がインターネット上のプレプリントサーバー

`http://arxiv.org/`

で手に入ることにもふれておきたい．参考文献中に，math.QA/0011194 などのような番号がついているものはここで誰でも無料で入手できる．

本書によってより多くの方々が数理物理学の最近の発展に興味を持っていただければ幸いである．

2005 年 1 月　　河東 泰之

第 **5** 話

非可換幾何学の不思議な世界

夏目利一

1　非可換性

1843 年 10 月のある夜，数学の長い歴史の中で特筆すべき事件が起きた．アイルランドの数学者 W.R. Hamilton は 10 年来，複素数の先にある新しいエキゾティックな数の体系を見つけることに情熱を注いでいた．物を数えることにより自然数が認識され，整数，さらにそれの比としての有理数が認識された．たとえば古代エジプトにおける測量技術の発達のおかげで，正方形の対角線の長さから有理数でない数が認識されたと思われる．これらの全体＝実数，それから 18 世紀に C. F. Gauss により導入された複素数，これらは現代の数学用語で言えば「体」すなわち，分配律・結合律・交換律が成り立つ四則演算が定義され，ゼロでない限り割り算が許された数たちのことである．Hamilton は 1843 年 10 月 16 日，実数・複素数のもっている重要な性質「積の可換性」：すなわち

任意の複素数 z, w に対して等式 $zw = wz$ が成り立つ，

を諦めるならば，新しい数の体系「Hamilton の 4 元数体 (quaternion)」が構成されることに気づいた．これは非可換性というものがはっきり認識された歴史的瞬間であった．

A, B, C 三つの箱にそれぞれ赤，白，青のボールが一つずつ入っている．箱 A, B の中身を入れ替える操作を操作 1，箱 B,C の中身を入れ替える操作を操作 2 とする．操作 1 をしてから操作 2 をした結果と順番を逆にした結果

を比較してみよう．操作１をしてから操作２をすると，箱Ａに白，箱Ｂに青，箱Ｃに赤のボールが入っている．これに対して操作２をしてから操作１をすると，その結果は箱Ａに青，箱Ｂに赤，箱Ｃに白のボールが入っている．二つの操作を施す順番を入れ替えると結果が全く異なってしまう．このとき二つの操作は可換でない，**非可換**であるという．日常生活におけるいろいろな操作・動作を思い出せば，非可換性というのは身の回りにあふれていることに気づく．

今日，数学の世界で非可換性は当たり前のものとして取り扱われているが，実は非可換性が認識され出したのは先に述べたようにそんなに古い話ではない．理由の一つは，数学の諸々の概念が「数」をとおして表現されているからである．数は，たとえば $4+8=12=8+4$ のように４に８を足そうが８に４を足そうが結果は同じ12であり，掛け算に関しても $4\times8=8\times4=32$ と掛ける順番によることはない．ピタゴラスはすべての物は数字により表されると考えていた．彼のドグマが19世紀まで影響を与えていたのかもしれない．

1925年以前の物理学では，光量子等の素粒子は点であり，それにエネルギーその他の物理量（数）が付加される対象であった．ところが W. K. Heisenberg 以降，粒子はもはや点でなく，どの辺りにどのくらいの確率で存在するかを表す波動関数として把握され，エネルギー等の物理量は作用素 (operator)，作用 (action) といったものに置き換えられた．数は可換な世界であるが，作用（動作）は非可換な世界であり，Heisenberg は非可換性を世界像に持ち込んだことになる．特に彼は「位置を計る」「モーメントを計る」という二つの作用は可換でないことを見出した．不確定性原理「粒子の位置とモーメントを同時に知ることはできない.」は非可換性の帰結であった．

2　非可換幾何

量子力学の創始者たちは，粒子・エネルギーを取り扱うには過激なアイディアを持ち込んだが，空間そのものについては，保守的であった．彼らは宇宙を記述するため多様体と呼ばれる「可換な」世界を想定した．多様体という概念，お馴染みの読者も多いかとも思うが，少し説明しておこう．ユークリッドの時代から幾何学においては，点，点の集まりとしての曲線・曲面が対象であった．それは現在でも同じである．地球の表面は単に点の集まりではなく２点間の距離を計ることができる．

定義 1　集合 X 上の**距離**というのは，X の２点 x, y に対して非負実数値 $d(x, y)$ を対応させるもので，

（公理１）　$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

（公理２）　$d(x,y) = d(y,x)$,

（公理３）　$d(x,y) + d(y,z) \geqq d(x,z)$　（三角不等式）

の三つの公理を満たすもののことである．

集合 X と距離 d のペアを**距離空間**という．公理２は x から y への距離を計っても，y から x への距離を計っても同じだと要求していることになる．距離という概念から遠い・近いという概念が生まれ,「近傍」という概念が生まれる．一般に，近傍という概念を伴った集合が**位相空間**と呼ばれるものである．

位相空間と先に出てきた多様体というものの間にはまだギャップがある．多様体というのは，各点の周辺がある一定の自由度をもった位相空間のことである．自由度が n であるとき，その多様体は n 次元と呼ばれる．別の言い方をすれば，２次元多様体とは各点の近傍が xy 平面の一部と「同一視」できる空間である．xy 平面では，点の x 座標，y 座標はどちらを先に計って

も結果は同じである．つまるところ多様体は可換な世界なのである．

量子力学者が粒子（点）を波動関数で置き換えたように，点を関数で置き換えるのが非可換幾何である．関数という概念は高校で現れるが，高校，大学での微積分において現れる関数は，たとえば $f(x) = x\tan x$ とか，２変数では $f(x,y) = e^{-x}\sin y$ といったように，具体的に x, y の式で表されるものが主であった．関数は集合の各点に数値を対応させる規則のことである．たとえば地球表面の各点にそこでの気圧を対応させるのはひとつの関数である．もちろんそれをよく知られた関数で表現することはできないが，だれもが普遍的に適用できる規則という意味で確かに関数である．単なる集合では２点の相互関係のない，いわばバラバラの空間であるから，面白いことは起きそうもない．そこで，位相空間と位相を反映した**連続関数**というものを対象とする．

位相空間はいろいろな性質をもち，それに応じて諸々の概念がある．その中で最も重要なのがコンパクト性と呼ばれるものである．コンパクト空間は閉じた空間とも呼ばれ，任意の実数値関数は最大値・最小値をもつという性質で特徴づけられる．コンパクト空間 X 上の複素数値連続関数全体を $C(X)$ と記す．$C(X)$ は C^* 環と呼ばれるものであり，関数の積が $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ であることから可換 C^* 環と呼ばれる．C^* 環の定義については後できちんと述べることにする．$C(X)$ のある代数的性質が空間 X のどんな性質を反映しているか，その関係が明確になれば，現実の世界 X を忘れて，影の世界 $C(X)$ を研究の対象とすることができる．旧ソ連の数学者 I.M. Gelfand は 1943 年，

「空間 X と Y が位相空間として同じ構造をもつ必要十分条件は
$C(X)$ と $C(Y)$ が C^* 環として同じ構造をもつことである．」

ということを証明した．

C^* 環 $C(X)$ はいくつかの公理を満たすが，その一つは積の可換性である．Hamilton の精神に戻って可換性公理を捨て去ってしまえば，非可換 C^* 環の世界が広がる．非可換 C^* 環 A というものを，現実の空間でない，仮想空間 (virtual space) "X" 上の C("X") とみなすことにより，A を調べることは仮想空間 "X"の性質を調べることになると考えようというのである．

非可換幾何という言葉は，1980 年代初めにフィールズ賞受賞者であるフランスの数学者 A. Connes が初めて用いた．筆者は彼について思い出深いことがある．1984 年秋から 1985 年春にかけてバークレーの数理科学研究所 (Mathematical Sciences Research Insititute) での年間プログラムの一つが作用素環であった．幸運にも筆者も一月半ほど参加することができた．参加者の名簿には名前・所属と専門分野が紹介してあった．専門分野の欄に作用素環，低次元トポロジーその他数多(あまた)ある中，彼の専門分野は「数学」と記してあった．ある日曜日，筆者が友人の M と散歩の途中あるカフェに入ると彼がノートで何か計算をしていた．Connes の数学がこんなふうにして生まれていくのだなと不思議な感動を受けたことを思い出す．

3　思想としての非可換幾何学

非可換性というものは，実は通常の幾何学・数学でも現れるものであるが，非可換性とはいっても，$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ のように積の順番を入れ替えると符号が変わるだけといった比較的取り扱いやすいものであり，一般的な非可換性は邪魔なものとして取り扱ってきた．高校，大学を通して最初に出会う非可換性は行列の積であろう．行列の積は掛ける順番により全く別のものになってしまう．そんなときでも従来の幾何では，たとえば，トレース $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$，あるいは行列式 $\det(AB) = \det(BA)$ のように非可換性を捨て去る道具を使うことによって，幾何的不変量を取り出すことをし

たのである．一般に，無限が関わった二つの操作は可換ではない．たとえば積分という操作と極限をとるという操作は一般的には可換ではない：

$$\int \lim f_n dx \neq \lim \int f_n dx .$$

このとき従来の数学では何をやってきたかと言えば，等号が成立するための十分条件，たとえば関数列の収束の一様性，を探したのである．等号が成立しないとき，そのギャップ (左辺 − 右辺) が何を表すかを調べることはしなかった．正面から非可換性と向き合っていたのでは決してないのである．非可換性と正面から向き合おうというのが非可換幾何の基本的な考え方なのである．

非可換性というパンドラの箱を開けてしまったことを後悔するのではなく，仲良く付き合おうというのが非可換幾何の根底にある考え方である．数学の一分野というよりは，むしろかつてのルソーの「自然に帰れ」のような思想・社会活動なのである．そうだと考えれば，非可換幾何という言葉に対して激しく反発する人たちがいることも納得できる．単に数学の一分野なら，好みに合わなければ無視しておけばよいが，思想活動であるから，その中に旧来の自分たちの考え方の根底を揺るがすものを感じ取って反発するのであろう．

筆者自身，長い間幾何学という言葉にしばられてきた．それゆえに非可換な世界で幾何学と呼ぶにふさわしい数学をすることを目指してきたが，最近それは全くポイントをはずしているのではないかと考えるようになった．非可換幾何という確立した分野があって，その中に研究対象を見つけようとするのではなく，出発点は各自の持っている幾何，トポロジー，解析における問題意識であり，それを数学的に定式化したときそこに現れる非可換性と正面から向き合い分析しよう，そのための道具を準備しておこうというのがこの思想活動なのではないか，そんなふうに考えるようになった．この立場から思いきって言えば「幾何」という言葉は捨て去られるべきものなのである．

4　非可換幾何の道具

非可換性と対峙するために用意された道具を具体的に使った例が，狭い意味での非可換幾何学である．今年も世界のあちらこちらで「非可換幾何学」をテーマとした研究集会が開かれるが，そこで言う非可換幾何学はこの狭い意味でのもので，別の表現をすれば，作用素環論における幾何学的手法とその応用ということになる．Connes の大著 “Noncommutative Geometry” の I. Segal による書評がアメリカ数学会の Bulletin に載っている．一言で（というのも無茶な話ですが）その書評をまとめると，

「非可換幾何なんて大げさなこと言ってるが，作用素環論における幾何学的手法とその応用にすぎないのではないか.」

ということになる．一面これは正しいが，実は非可換幾何のもつもっと深い意味を全く見ていないのである．

多様体の教科書を開くと，多様体という概念を導入した後，接ベクトル，ベクトル場，微分形式，de Rham コホモロジー，そしてその後微分幾何ではリーマン計量，接続，曲率等々，大域解析学では楕円型微分作用素等々が導入される．これらの諸概念を代数の言葉に翻訳しようというのである．

まず，C^* 環というものについて大雑把ではあるが振り返っておこう．

$X = S^2$ (2 次元球面) $\subset \mathbb{R}^3$ とし，$C(X)$ で複素数値連続関数の全体を表す．$C(X)$ のもっている性質を列挙してみよう．

(1)　複素数体 ($\mathbb{C}$) 上のベクトル空間である．

(2)　結合律，分配律を満たす積をもつ．

(1), (2) を満たすものを $\mathbb{C}$ 多元環という．$C(X)$ はさらに

(3)　$\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ (関数の複素共役) をもつ，また

(4)　$\|f\| = |f(x)|$ の最大値，とすると

(a) $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$,

(b) $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|, \quad \alpha \in \mathbb{C},\ f \in C(X)$,

(c) $\|f + g\| \leqq \|f\| + \|g\|$

$\|\cdot\|$ はノルムと呼ばれる．上の例から分かるように，ノルムというのは複素数に対する絶対値の概念を一般化したものなのである．最も大事な性質は，等式 $\|\bar{f}f\| = \|f\|^2$ がすべての f について成立するということである．一般にノルムをもったベクトル空間をノルム空間という．ノルム空間 $(C(X), \|\cdot\|)$ はさらに「完備性」と呼ばれる性質をもつ．これはある種の関数列が収束することを保証する条件である．

一般に，$\mathbb{C}$ 多元環 A が反線形写像 $a \mapsto a^*$ をもち，$(ab)^* = b^*a^*$ が成立するとき $*$ 多元環と呼ばれる．

定義 2　ノルム $\|\cdot\|$ が与えられ

(1) $\|ab\| \leqq \|a\|\|b\|$,

(2) $\|a^*a\| = \|a\|^2$,

(3) 完備性

の三つの条件を満たすとき，$\|\cdot\|$ を ***C^* ノルム***，A を ***C^* 環***という．

（例 1）$A = \mathbb{C}$, $\|a\| = |a|$ ($a \in \mathbb{C}$ の絶対値)

（例 2）$M_d(\mathbb{C})$，$*$ 写像は $X^* = \overline{X}^t$ でよいが，問題はノルムである．試しに

$$\left\| \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right\| = \max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta|\}$$

とおくと，たとえば $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ に対して $\|X^*X\| = 2 \neq \|X\|^2$ となり，条件 (2) が満足されない．

$V=\mathbb{C}^d$ は内積空間である．そこで

$$\|X\|=\sup\{\|Xv\|:\|v\|=1\}$$

を考える．これは X が V のベクトルをどの程度伸び縮みしているか計っているが，実はこれが条件 (2) を満たすノルムとなる．行列 X を具体的に与えてノルムを計算するには以下のようにすればよい．

大学一年で学ぶ線形代数を思い出そう．X^*X は正値エルミート行列だから，その個有値 $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ は非負実数である．すると

$$\|X\|=\|X^*X\|^{1/2}=\max\{\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_d}\}$$

が成立する．このことから読み取ってほしいことは，X のノルムは行列成分からただちに分かるような簡単なものではないということである．

$C(S^2), M_d(\mathbb{C})$ は積に関して単位元をもつ．前者については，定数関数 1 であり，後者については単位行列である．いつでも単位元をもつわけではない．$X=\mathbb{R}$ (数直線) の場合を考えよう．X 上の連続関数にもいろいろな種類がある．$f_1(x)=x$, $f_2(x)=1/(1+x^2)$ を考えると，f_1 は原点から遠ざかるといくらでも大きな値をとりうるが，f_2 は原点から遠ざかれば値はどんどん小さくなる: $\lim_{x\to\pm\infty} f_2(x)=0$．$f_2$ のような関数は無限遠点で消える関数と呼ばれる．無限遠点で消える関数全体を $C_0(X)$ と記す．定数関数は無限遠点で消える関数ではないから，$C_0(X)$ は単位元をもたない C^* 環となる．

C^* 環を安易に大量に作るには先の行列の場合を一般化してやればよい．内積空間 $V=\mathbb{C}^d$ の無限次元版であるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を考え，行列に対応する有界線形作用素というものを考える．有界性は無限をコントロールするための条件である．有界線形作用素全体 $B(\mathcal{H})$ がそれ自体が C^* 環である．任意の部分集合 $S\subset B(\mathcal{H})$ を含む最小の C^* 環 $C^*(S)$ が一意的に定まる．$C^*(S)$ を $\mathcal{H}$ 上で S が生成する C^* 環という．特に大事なのが次の例である．$T\in B(\mathcal{H})$ は $T(\mathcal{H})$ の次元が有限であるとき，有限階数の作用素と呼ばれる．

有限階数の作用素全体で生成される C^* 環は $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ と記され，$\mathcal{K}(\mathcal{H})$ に属する作用素はコンパクト作用素と呼ばれ有界作用素の中でも特に重要なものである．

２次元トーラス $\mathbb{T}^2$ (ドーナッツの表面) 上の関数は xy 平面上の２重周期関数 : $f(x+2\pi, y) = f(x, y) = f(x, y+2\pi)$ と同一視される．２重周期関数で

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x,y)|^2 dxdy < \infty$$

となる，ある種の関数（可測関数）全体は，内積

$$(f,g) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,y)\overline{g(x,y)}dxdy$$

に関してヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{T}^2)$ となる．$L^2(\mathbb{T}^2)$ 上で関数 $\exp ix, \exp iy$ を掛ける作用素をそれぞれ U, V とすると，実は $C^*(U,V) \subset B(L^2(\mathbb{T}^2))$ は $C(\mathbb{T}^2)$ と一致する．

数列の空間

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \boldsymbol{a} = (a_n) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

はヒルベルト空間である．作用素 U_θ, V_θ を以下のように定める：

$$U_\theta(\boldsymbol{a})_n = a_{n-1}, \quad V_\theta(\boldsymbol{a})_n = \lambda^n a_n, \qquad \lambda = \exp(2\pi i\theta).$$

すると，直接計算で関係式 $V_\theta U_\theta = \lambda U_\theta V_\theta$ が成立することが分かる．$A_\theta = C^*(U_\theta, V_\theta) \subset B(L^2(\mathbb{T}^2))$ は昔は回転 C^* 環と呼ばれたが，最近は非可換２次元トーラスと呼ばれる．理由は，形式的に $\theta = 0$ とおいてみると関係式が $VU = UV$ となり $C(\mathbb{T}^2)$ を得るからである．この意味で A_θ は $C(\mathbb{T}^2)$ の「変形」だと考えられる．

5　非可換多様体

数学の基本的な考え方のひとつに構造というものがある．余談ながら，構造主義哲学者レヴィストロースも構造という言葉を数学と同じ意味で使っている．集合という構造の上に「位相構造」を積み上げたものが位相空間であり，その上に位相構造と相性のよい (compatible) 構造を乗せることによりいろいろなものが得られる．たとえばベクトル空間を乗せれば「位相ベクトル空間」，群構造を乗せて「位相群」等々である．位相空間に「可微分構造」を乗せたものが「可微分多様体」である．思い出しておこう．位相空間 X が n 次元多様体であるとは，X の各点の近傍で $\mathbb{R}^n$ の開集合と同一視されるものが存在し，この帰結として局所的に座標系がとれるが，二つの座標系が重なりあったところで座標変換が可微分であるもののことである．可微分多様体上では局所座標を用いることにより，微分可能な関数という概念が導入される．無限回連続微分可能な (C^∞) 複素数値関数の全体 $C^\infty(X)$ は多元環となる．実は $C^\infty(X)$ は可微分構造を決めてしまうのである．

定理 1　X, Y を可微分多様体とする．このとき次が成立する：

$$C^\infty(X) \cong C^\infty(Y) \ (\mathbb{C}\text{ 多元環として})$$
$$\iff X \cong Y \ (\text{可微分多様体として}).$$

X をコンパクトな可微分多様体としよう．$C^\infty(X)$ は C^* 環ではないが $C(X)$ の稠密な $*$ 部分多元環である．空間の非可換版を考えたいのだから，多様体の非可換版を考えたい．そのひとつのアプローチは，ペア $(C(X), C^\infty(X))$ の抽象化を考えることである．

出発点は C^* 環 A とその稠密な $*$ 部分多元環 $\mathcal{A}$ である．このペアが多様体と呼ぶにふさわしい状況を考えようというのである．多様体の最も基本的な概念は次元である．多様体 X が n 次元だとすると X の位相空間としての

次元（被覆次元）もnである．この被覆次元は$C(X)$の言葉に翻訳され，さらに任意のC^*環Aに対して実階数(real rank) $RR(A)$として一般化されている．ところが，先に出てきたA_θに対して実階数を計算すると，θが無理数の場合，0となってしまう．A_θを非可換2次元トーラスと考えたいのだから，これはちょっと具合が悪い．では多様体を眺めたとき，被覆次元の他にどこから次元を引っ張り出すことができるであろうか．ここで大域解析学の助けが必要となる．(この意味で，単なる位相多様体の非可換版を考えるのではなく，可微分多様体の非可換版を将来考えることになる.)

例で考えよう．2重周期関数の代わりに周期2πの関数を考えることにより，ヒルベルト空間$L^2(S^1)$が得られる．微分作用素$D = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$を考える．$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(inx)$ $(n \in \mathbb{Z})$とおくと，フーリエ解析は，$\{\phi_n\}$は$L^2(S^1)$の正規直交基底であることを教えてくれ，直接計算すれば$D\phi_n = n\phi_n$が得られる．この最後の等式は，ϕ_nはDの固有値nに対する固有ベクトルであることを示している．特にDの固有値全体の集合は$\mathbb{Z}$と一致し，各固有値の重複度は1である．

一方，$L^2(\mathbb{T}^2)$上で1階の微分作用素

$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

を考える．$\phi_{mn}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp(i(mx+ny))$，$m,n \in \mathbb{Z}$は正規直交基底であり，$\overline{\partial}\phi_{mn} = i(m+in)\phi_{mn}$となる．この場合の固有値の集合は$\{m+in : m,n \in \mathbb{Z}\}$である．

境界のないコンパクトな多様体（閉多様体）上のm階の楕円型微分作用素Dを考える．Dの形式的共役をD^*とする．D^*Dは$2m$階の楕円型作用素であり固有値をもつ．固有値は非負であり，それを小さい順に並べて$0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$とする．多様体の次元を$n$とすると，$k \longrightarrow \infty$となるとき，数列$\{\lambda_k\}$の増大度は$\{k^{2m/n}\}$の増大度と一致する．上記二つの例でこの点を確認してみるとよい．楕円型微分作用素それ自身が，多様体の次元に

関するデータを内包していることになる．

以上のことを念頭に，閉多様体上の1階楕円型微分作用素 D_0 を抽象化・代数化することを考え，C^∞ 関数の全体に対応する $*$ 多元環に対してスペクトル三つ組という概念が導入され，それが抽象化された多様体（仮想空間）だとみなされることになる．数学的な定義等細部については参考文献の [1], [2] 参照．この空間でどんなことが起きているか想像してみよう．

先に述べたように，通常の空間 xy 平面では x 座標を計るという操作と y 座標を計るという操作は可換であり，どちらを先にしても同じ結果を与える．非可換な世界ではもちろん x 座標というものは存在しないが，「x 座標を計る」という操作がある作用素で表されている．想像をふくらませてみよう．「x 座標を計る」という操作と「y 座標を計る」という操作が可換でない世界では，たとえば部屋の東南の角近くに落ちている何か高価そうなものを拾おうとしたとき，東側の壁からの距離を計る操作と南側の壁からの距離を計る操作が可換でないために位置が確定せず，いつまでも指をくわえて眺める羽目になってしまう．

6　非可換幾何学の道具箱

道具箱にはローテクからハイテクまで種々いろいろな道具が入っている．ハイテク・ツールに関してはたとえば参考文献の [1] を参照してもらうことにして，ここでは最も基本的なものを解説する．

K 群

トポロジーにおいては空間 X を調べるために，(コ) ホモロジー，K 群といった代数的不変量を考察する．そして，いろいろな幾何学的量がそれら代数的対象の元として定められる．たとえば Chern 類，Pontrjagin 類といった幾何学における最も基本的な量はコホモロジー環の元として定義される．

K 群は一般化されたコホモロジー群とも呼ばれるものである．X をコンパクト空間とし，n を自然数とする．X の各点 x に n 次元ベクトル空間 E_x が対応し，これらのベクトル空間を寄せ集めたもの $E = \bigcup E_x$ が "いい空間" になっているとき E を X 上のベクトル束という．簡単な例で考えよう．xy 平面の原点中心の単位円を X とする．X の各点 x で接線 L_x は接点 x を原点として 1 次元ベクトル空間の構造が入る．xyz 空間の中で L_x を原点 $(0,0,0)$ から見て時計回りに 90 度回転すると，これら 1 次元ベクトル空間の全体は xyz 空間の中で方程式：$x^2 + y^2 = 1$ で表される円柱となる．この円柱が空間 E であり，X 上のひとつのベクトル束を定める．

上の例で各 L_x は実数体上のベクトル空間であるが，K 群を考える際は複素数体上のベクトル空間を考える．その理由はトポロジーにおける深い結果（ユニタリー群のホモトピー群に関する Bott 周期性）と関連しており，ここでは立ち入らない．次元 n の複素ベクトル束という概念が導入される．

空間 X 上のベクトル束 E, F がいつ同じとみなすかを定める同型の概念が導入され，同型なものを同じとみなして同型類が考えられる．

ひとつ言葉を復習しておく．整数全体，実数全体のように足し算が定義され，$(x+y)+z = x+(y+z)$, $x+y = y+x$ が成立し，またゼロと呼ばれる特殊な元が存在し，任意の元 x に対して一意的に y が存在し $x+y=0$ となるときアーベル群と呼ばれる．コンパクト空間 X 上の複素ベクトル束の同型類より，ある代数的操作でアーベル群が構成される．ベクトル束という幾何的対象から得られたこのアーベル群は位相的 K 群と呼ばれ，$K^t(X)$ と記される．一方，C^* 環 $C(X)$ からアーベル群 $K(C(X))$（解析的 K 群）が構成され，次の有名な Swan の定理が成立する．

定理 2　アーベル群として同型対応

$$K^t(X) \cong K(C(X))$$

が成立する．

$K(C(X))$ の構成において $C(X)$ の可換性は実は全く用いられておらず，任意の C^* 環 A に対して適用され，アーベル群 $K(A)$ が得られる．このアーベル群は実は K_0 群と呼ばれるもので $K_0(A)$ と記される．わざわざ K_0 と記したことからも推測されるように，もう一つのアーベル群 $K_1(A)$ が構成される．この二つのアーベル群の間には関連がある．A を C^* 環とし，数直線上の A に値をもつ連続関数で，無限遠点で消滅する関数の全体を $S(A)$ とする．$S(A)$ は A の懸垂と呼ばれる．このときアーベル群としての同型

$$K_1(A) \;\cong\; K_0(S(A))$$

が成立する．

先に触れたトポロジーにおける深い結果が，K_0, K_1 の二つだけ考えれば十分情報が得られることを保証してくれる．ちなみに実数の範囲で考えると8個のアーベル群を考える必要が出てくる．

C^* 環に対する K 群の概念は新しいものではないが，具体的に与えられた C^* 環の K 群を計算することは非常に難しい．トポロジーの場合でも定義そのものから K 群を計算することはほぼ不可能であり，空間を構造の簡単な部分が寄り集まっているとみなして計算する方法 (Mayer-Vietoris 完全列) 等を用いて計算する．80年代に入り計算技術がいろいろ発見され種々の C^* 環の K 群が計算された．そのころは K 群を計算するだけで論文になるという良き時代であった．

先に述べたように，n 次の複素行列全体 M_n は C^* 環である．K 群はどうなっているのであろう？　答えは $K_0(M_n) \cong \mathbb{Z}$ である．行列 $a = (a_{ij})$ に対して a の跡（トレース）は $\mathrm{Tr}(a) = \sum_i a_{ii}$ で与えられ，線形写像 $\mathrm{Tr} : M_n \longrightarrow \mathbb{C}$ を定める．トレースのもっている最も大事な性質は，任意の $a, b \in M_n$ に対して $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$ が成立することである．トレースが同型 $K_0(M_n) \cong \mathbb{Z}$ を導

く．一般に C^* 環 A から $\mathbb{C}$ への線形写像 τ で性質：$\tau(xy) = \tau(yx)$, $x, y \in A$ を満たすものをトレースと呼ぶ．トレースが存在するとそれが加法的写像 $\tau_* : K_0(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ を導く．もちろんすべての C^* 環がトレースをもつわけではない．トレースが存在しなくても加法的写像 $K_0(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ を構成する方法がある．それがもう一つの基本的ツールであるサイクリック・コホモロジーである．

サイクリック・コホモロジー理論

M_n の $2k+1$ 個の元 $a_0, a_1, \cdots, a_{2k}$ に対して複素数 $\phi(a_0, a_1, \cdots, a_{2k})$ を対応させる関数で，各変数に関して線形であるものを $(2k+1)$ 線形汎関数という．$\phi_{2k}(a_0, a_1, \cdots, a_{2k}) = \mathrm{Tr}(a_0 a_1 \cdots a_{2k})$ は $(2k+1)$ 線形汎関数であり，以下の性質をもつ：

(1)　$\phi_{2k}(a_0, a_1, \cdots, a_{2k}) = (-1)^{2k}\phi_{2k}(a_{2k}, a_0, a_1, \cdots, a_{2k-1})$,

(2)　$\phi_{2k}(a_0 a_1, \cdots, a_{2k+1}) - \phi_{2k}(a_0, a_1 a_2, \cdots, a_{2k+1}) + \cdots +$
$(-1)^i \phi_{2k}(a_0, a_1, \cdots, a_i a_{i+1}, \cdots, a_{2k+1}) + \cdots +$
$(-1)^{2k}\phi_{2k}(a_0, a_1, \cdots, a_{2k} a_{2k+1}) + (-1)^{2k+1}\phi_{2k}(a_{2k+1} a_0, a_1, \cdots, a_{2k})$
$= 0.$

一般に，$\mathbb{C}$ 多元環 $\mathcal{A}$ 上の $(2k+1)$ 線形汎関数 ψ で上の (1), (2) を満たすものをサイクリック $2k$ コサイクル（サイクリック偶コサイクル）と呼ぶ．(1), (2) において $2k$ を $2k+1$ で置き換えたものをサイクリック $(2k+1)$ コサイクル（サイクリック奇コサイクル）と呼ぶ．ひとつ簡単な例を考える．円周上の連続関数全体 $C(S^1)$ は数直線上の周期 2π の連続関数の全体 $\mathcal{P}$ と同一視される．周期 2π の無限回連続微分可能な関数全体 $\mathcal{P}^\infty$ は $\mathcal{P}$ の部分環である．$\mathcal{P}^\infty$ 上のサイクリック 1 コサイクル ψ が次の式で定義される：

$$\psi(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g'(x)\, dx\,.$$

このコサイクルは関数の微分を用いて書かれている．したがって $\mathcal{P}$ 全体では定義されていない．$\mathcal{P}$ 全体で定義されたコサイクルを構成しようとするとき，まず思いつくのは，積分

$$\tau(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

である．読者自らチャレンジしてもらうとよいが，$\mathcal{P}$ 全体で定義された 1 コサイクルを構成しようとしてもうまくいかない．実は $\mathcal{P}$ 全体で定義された 1 コサイクルは自明なもの，すなわち任意の f, g に対して $\psi(f, g) = 0$ となるものしか存在しない．一般に C^* 環は面白いサイクリック・コサイクルをもたないが，その部分環が十分多くのサイクリック・コサイクルをもつことがある．

上記積分は一般の空間でも考えることができる．コンパクト空間 X 上の測度 μ は $C(X)$ 上のトレース τ を次式で定める：

$$\tau(f) = \int_X f(x)d\mu(x), \qquad f \in C(X).$$

サイクリック偶コサイクルは加法的写像 $K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$，奇コサイクルは加法的写像 $K_1(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を誘導する．上記例に関連して言えば，ψ は加法的写像 $\psi_* : K_1(\mathcal{P}^\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ を定めるから，もし $\mathcal{P}^\infty$ と $\mathcal{P}$ が同じ K 群をもてば写像 $\psi_* : K_1(C(S^1)) \longrightarrow \mathbb{C}$ が得られたことになる．幸いにして同型

$$K_i(\mathcal{P}^\infty) \cong K_i(C(S^1)) \qquad (i = 0, 1)$$

が成立する．一般に，C^* 環 A の $*$ 部分環 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{P}^\infty$ と $\mathcal{P}$ の関係を一般化したある条件を満足するとき，$\mathcal{A}$ は A の中で正則関数論的に閉じているという．このとき $\mathcal{A}$ 上のサイクリック・コサイクルは K_* からの写像を定める．定義域が正則関数論的に閉じているサイクリック・k コサイクルを k トレースと呼ぶ．k トレース ψ が K 群上に導く写像を

$$\psi_* : K_i(A) \longrightarrow \mathbb{C}$$

と記すことにする．

τ を測度 μ から得られた $C(X)$ 上のトレースとすると，X 上のベクトル束 E に対して

$$\tau_*([E]) = \dim E$$

が成立する．

7　数理物理学

先に述べたように，非可換幾何学というものは数学のいろいろな分野に現れる非可換性と正面から向き合おうという思想活動であり，そのための道具を提供するものである．このところ非可換幾何を積極的に使おうとの動きが見られる．特に数理物理学においてこの動きは顕著であり，数理物理学とのからみでトポロジー・幾何学においても非可換幾何学が使われ始めている．数理物理は非可換性の宝庫である．その非可換性に対して非可換幾何学が巧く適用された例を紹介しよう．前説で紹介した基本的なツールがどのように使われているか注意してほしい．

ここで考える例は量子 Hall 効果と呼ばれる現象である．古典的 Hall 効果は 19 世紀の物理学者 E.H. Hall により発見された．平面状に分布するガス状の荷電粒子に一様な磁場 B を平面に垂直な方向にかけると粒子は円運動をする．密度を N，電荷を e とする．平面方向に電場 E をかけると，上記粒子の円運動がこわれ，B, E に直交する方向に電流が生じる．これを Hall カレントという．Hall カレントと電圧 E の比を Hall 伝導度 σ_H という．Hall は σ_H は密度 N の 1 次関数であることを観測した．より正確には

$$\sigma_H = Ne/|B|$$

である．

一方，1980年に川路-若林，K. von Klitzing - G. Dorda - M. Pepper は常温下の古典的 Hall 効果と異なり，超低温状態では σ_H の値が N の階段状の関数になることを発見した．さらにある特殊な状況下（フェルミ・レベルがランダウ・レベルの間にあるとき）では，σ_H が e^2/h (h はプランク定数) の整数倍になることを発見した．この現象の数学的証明に非可換幾何学が用いられたのである．J. Bellisard による証明は目にする機会が多いので (たとえば参考文献 [6])，ここでは J. Xia による証明 ([7]) を紹介する．全く独立の証明というわけではなく，Bellisard による構成を用いる．

ひとつ概念を導入しておく必要がある．C^* 環 A が時間発展 $\alpha = (\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ をもつとき，C^* 接合積と呼ばれる C^* 環 $A \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ が構成される．K 群に関して Connes 同型と呼ばれる同型写像

$$\tau_\alpha^i : K_i(A) \longrightarrow K_{1-i}(A \rtimes_\alpha \mathbb{R}) \qquad (i = 0, 1)$$

が存在する．筆者は G.A. Elliott，R. Nest との共著の論文で，A の正則関数論的に閉じている部分環 $\mathcal{A}$ が α の作用で不変であるとき，任意の $\mathcal{A}$ 上のサイクリック・k コサイクル ψ から滑らかな接合積 $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 上のサイクリック・k+1 コサイクル $\sharp_\alpha(\phi)$ を構成し，i と k の偶奇性が同一であるとき，

$$(\sharp_\alpha(\phi))_* \tau_\alpha^i = (\phi)_*$$

が成立することを示した．これらが Xia の証明における道具である．

Bellisard は C^* 環の言葉で Hall 伝導度を次のように記述した．物理的に重要な意味をもつあるコンパクト空間 Ω が2次元リー群 $\mathbb{R}^2$ の作用 β をもち，接合積 $C(\Omega) \rtimes_\beta \mathbb{R}^2$ 上の2トレース ψ が定める加法的写像

$$\psi_* : K_0(C(\Omega) \rtimes_\beta \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{C}$$

の値域が Hall 伝導度の集合となる．$\mathbb{R}^2$ による作用は $\mathbb{R}$ の二つの作用 β_1, β_2（時間発展）を続けて作用させた結果とみなせば，Connes 同型から K 群の

同型

$$K_0(C(\Omega)) \cong K_0(C(\Omega) \rtimes_\beta \mathbb{R}^2)$$

が得られる．Xia はサイクリック・コサイクル ψ が $C(\Omega)$ 上の 0 トレース，つまり通常の意味でのトレースに Elliott-夏目-Nest の構成を 2 回適用して得られたものであることを示した．実際，Ω 上の確率エルゴード測度 μ が定めるトレースを τ としたとき $\sharp_{\beta_1}\sharp_{\beta_2}\tau = \psi$ が成立する．Elliott-夏目-Nest の構成と Connes 同型の整合性から，Hall 伝導度の集合は加法的写像

$$\tau_* : K_0(C(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

の値域と一致することが分かる．この写像はベクトル束の次元を計っているものであるから，その値域が整数と一致することは明らかである．

8 最後に

21 世紀に入り，数学のいろいろな分野が融合しあって面白い数学がこれから生まれてくるであろう．そこにおいて非可換幾何学が重要な役割を果たすことを確信している．そのためにも，若い世代が非可換幾何に興味を持ってくれることを心から念じて筆をおくことにする．

参考文献

[1] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.

[2] A. コンヌ著（丸山文綱訳），非可換幾何学入門，岩波書店，1999.

[3] J. Cuntz, A survey of some aspects of noncommutative geometry, *Jahreber. Deutsch. Math.-Verein* **95** (1993).

[4] A. Lesniewski, Noncommutative geometry, *Notice of Amer. Math. Soc.* **44** (1997).

[5] 中神祥臣・夏目利一，非可換幾何とは?,『数学のたのしみ』No. 4，1997.

[6] 中神祥臣，量子化された微分幾何学——非可換幾何学，数理物理学の展開（江沢・小嶋編）第5章，東京図書，1988，pp. 151–183.

[7] J. Xia, Geometric invariants of the quantum Hall effect, *Commun. Math. Phys.* **119** (1988), 29–50.

非可換空間上のゲージ理論

綿村　哲

1　序　　文

1.1　はじめに

非可換空間上のさまざまな場の理論が，物理の理論の中に現れ議論されるようになってきました．ここでは，特に非可換空間上のゲージ理論の意味といくつかの例を紹介したいと思います．最近特に非可換幾何学 [1, 2, 3] が注目されるようになってきたひとつの理由は，よくご存知のように弦理論で直接，非可換幾何学の対象となるものが出てきたことにあります．簡単に思い出しておきますと，弦理論に D-brane という広がりのあるソリトン解があることがその出発点でした．閉じた弦の有効理論で現れるゼロ質量の粒子は，重力子 $g_{\mu\nu}$，ディラトン ϕ，B 場と呼ばれる反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ があります．一般に B 場の真空期待値はローレンツ変換に対する対称性を破るので $\langle B_{\mu\nu}\rangle = 0$ と思うのですが，D-brane があると，どうせローレンツ変換に対しての対称性は破っているので，あまりこの制約は意味をもたなくなります．ところが，$\langle B_{\mu\nu}\rangle \neq 0$ のとき，これがシンプレクティック形式 (symplectic form) のように振る舞い量子化の種を与えます．このため，一般に D-brane の有効理論が非可換ゲージ理論になり，D-brane の作る超曲面が非可換空間のように見えます．このことは，少なくとも非可換幾何学が自然に弦理論の中に入っていることを意味しています．ただ，この現象は，量子ホール効果のときに重心の座標が非可換になる効果と同じで，ある意味で可換な場の理

論の非摂動的な効果で実現されていると考えることもでき，必ずしも非可換幾何学の必要性と直結しません．

しかし，もっと広い立場から考えると，物理の理論の根源を解き明かすのに，やはり非可換幾何学が本質的であると考えられます．

1. **重力の量子論**　弦理論に限らなくても，量子力学的な観測に基づく幾何学，つまり場の量に基づく幾何学が必要であることは，だれも否定しないでしょう．このことは実は，幾何学の関数代数による表現を必要としていると言えます．そして，このことがすでに非可換幾何学の必要性を意味していると言えます．単純なことのようですが，場の量子論に従うならば，粒子の位置も期待値として表されているので，重力も通常の場として扱う限り幾何学も場の量で表されなければならないでしょう．これが非可換幾何学の本質で，宇宙が非可換空間かどうかにかかわらず，重力理論とくに量子重力理論は非可換幾何学の枠内で議論するのが自然であると言えます．
2. **Closed string と位置の不確定性関係**　やはり弦理論に戻りますが，closed string の立場でも，非可換性がその背後に潜んでいると考えるのが自然と思われます．*D*-brane に関係した議論では，すべて Open string に関わった現象であり，一方で空間の幾何学を決める重力を含むのは closed string なので，なにも幾何学まで変更する必要はないのではと考えることもできます．しかし，closed string だけを考えても，一般に時空の非可換性がでるという議論があります [4]．これは，雑に言って string のように広がりのあるもので点を観測したときには，その広がり程度の精度でしか測定できないことを意味しています．このことを最も簡単に理論に取り込むのは座標の非可換性を導入してやり，位置の不確定性関係として成立させることでしょう．
3. **有限化 (Regularization)**　これは，少し違った立場から非可換空間上

の場の理論をとらえたもので，上記の議論と少し異なりますが，もうひとつの非可換幾何学上の場の理論の物理的応用に関するものです．場の量子論の計算では，その発散を処理するために何らかの有限化を必要とします．このような計算では，幾何学は本質的ではないのですが，それでも，有限化された理論をCutoffが有限なまま閉じさせようとすると，非可換幾何学の世界に踏み込むと考えられます．つまり，有限化のためにCutoffを入れることや，格子などで空間を近似することなどは，考えている空間上の関数を制限することに相当します．このような制限のもとで，場の理論を閉じた体系にすることを考えます．すると，関数を制限することが後で見るように量子化と似た効果を生んで非可換の種を持ち込み，ある種の非可換幾何学の世界の場の理論と見ることができるようになります．特に，有限化された理論での位相幾何学的な量に関係したAnomalyなどを見ようとすると，幾何学的に扱ってやることのメリットが顕著になると考えられます．

1.2　非可換幾何学

では，非可換幾何学とは，どのようなものなのでしょうか．通常の幾何学，特に微分幾何学では，空間を考えるときに座標をとり，それを使って空間上の点や線を考えていきます．非可換空間というのは，直感的にはこの座標が非可換になったような空間を考えたいわけです．ところが，座標を非可換にするというだけでは，微分はどうしてくれるのか，積分はどうしてくれるのか，などなどという質問に答えることができません．そこで，もっと具体的かつ強力な指導原理が必要になります．それが，荒っぽく言うと**代数化**の考え方です．

空間の点や線を基準に幾何学を考えるのでなく，いま考えている空間上の連続関数 $C(M)$ を使って幾何学を記述することが可能であることが知られ

ています．これは，物理的には場の量，または，波動関数の情報から空間の幾何学を引き出すということで，世の中，量子力学に従っているとすれば，すべての時空に関する情報，たとえば粒子間の距離や空間が曲がっているかなどの情報もすべて関数から読み出せても，ぜんぜん不思議なことではありません．つまり，点や線を離れて，空間の関数の作る代数 $C(M)$ を基本に幾何学的量を定義し幾何学を構成していこうということです．

これを支えるのは，Gel'fand-Naimark の定理と呼ばれる定理で，可換な C^* 環が与えられると，それに同型なある空間上の関数代数の作る代数 $C(M)$ があることを主張しています．そこで，ある可換な代数をもとにした幾何学が作られればそれをある空間の幾何学と思うことができるわけです．つまり，幾何学的な量が代数 $C(M)$ に代数的な操作によって構成でき

$$\text{幾何学} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{可換代数}$$

の関係が確立できるということです．

非可換幾何学というのは，この代数化された手法を非可換代数に適用することにより

$$\text{非可換幾何学} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{非可換代数}$$

の関係から，“非可換空間” の幾何学を研究すること，と言えます．結果として，すべての幾何学的概念は代数的に構成されることになります．

このような対応関係から，まず非可換空間のトポロジーの構造を見ていくというのが話の順番でしょうが，物理として興味があるのは，このような非可換空間上で微分幾何学が定義でき，場の理論が展開できるのかということです．しかし，ただ闇(やみ)雲にこれを進めるのでなく，ほしい概念を何か可換極限との対応を見ながら，理論を構成していくことが効率的でしょう．このとき，量子化との対応関係が重要になってきます．

たとえば，Diffeomorphism に対応する代数的概念は，代数 $\mathcal{A}$ の自己同型写像 $Aut(\mathcal{A})$ と考えることができます．ですから，非可換では Automorphism

として $\mathcal{A} \ni a \to g^{-1}ag \in \mathcal{A}$ が一般の Diffeomorphism に相当すると考えられます．また，これの微小変換である Infinitesimal diffeomorphism は通常ベクトル場で与えられます．非可換の場合にはこれは，代数の Derivation $Der(\mathcal{A})$，つまり $Der : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ で，Leibnitz rule を満たすものが対応すると考えられます．特に，代数の元 a を使って Derivation が与えられる場合は一般に $V(a) = [a, \cdot]$ と書くことができます．これの古典的な対応物は，ポアッソン (Poisson) 多様体におけるハミルトニアンベクトル場 $h : C(M) \ni f \to h_f = \{f, \cdot\}_p$ と考えられるので，この対応関係から非可換幾何学におけるベクトル場を理解することができます．

1.3　量子空間

それでは，具体的にはどのような非可換空間を考えているのでしょうか．広いクラスの非可換空間を得るには，一般のポアッソン多様体を量子化する方法があります．このような空間を量子空間と呼ぶこともあります．シンプレクティック (symplectic) 多様体やポアッソン多様体の量子化に関してはさまざまな方法が提唱されていますが，$\hbar$ の取り扱いに関して，展開の形式的パラメータと思うかどうかで概念的に 2 種類に分かれます．[1]

通常，変形量子化と呼ばれる量子化の方法では $\hbar$ は展開の形式的パラメータとして扱われます [5]．これは，量子化をポアッソン括弧の定義された関数環，つまりポアッソン多様体 M 上の関数環の変形としてとらえたもので，変形によって，associativity を保ちながら，新しい $\star$ 積と呼ばれる積を導入し非可換な代数を得ます．$\star$ 積は，一般に $C^\infty(M)$ を係数にもつ形式級数 $F = \sum_{k>0} f_k \hbar^k$ の間に定義された積で，次の条件を満たします．

[1] もちろん通常の物理的な量子化は，$\hbar$ はプランク定数 $\hbar = 1.054 \times 10^{-27}$erg · sec（または 1）なので $\hbar$ は数．

1. $(F \star G) \star H = F \star (G \star H)$, (associativity)
2. $f \star g = fg + \frac{1}{2}\hbar\{f, g\} + O(\hbar^2)$

この手法では量子化は完全に代数レベルで行われ，その表現を要請せず，$\hbar$ 展開はあくまで形式的としています．

これに対して，Berezin による量子化があります [6]．概念的には Berezin の量子化も変形量子化ですが，代数の表現を与えるヒルベルト空間が構成の段階から入っています．この量子化は，Kähler 多様体に限る，特殊な場合に適用することができ，変形された代数の表現もともに与えるようなものになっています．ですから，非可換微分幾何学を考えるうえでも非常に性質のよいものと思われます．

いま，(コンパクト) Kähler 多様体を M とし，この上の line bundle L のテンソル積 $L^n(= L^{\otimes n})$ を考え，この上の Global Holomorphic section 全体を $\Gamma_{hol}(L^n)$ とします．この，section ξ に M 上の関数 $f \in C^\infty(M)$ を掛けます．これによって，$f\xi$ は一般に Holomorphic section ではなくなりますが，これを再び $\Gamma_{hol}(L^n)$ に落とす projection が定義できます．つまり，その projection を $\mathcal{P}$ とすると

$$\mathcal{P}a\xi \in \Gamma_{hol}(L^n) \tag{1.1}$$

となります．この projection を使うことにより，任意の関数 f に関して，ある $\Gamma_{hol}(L^n)$ の operator が一つ決まることになり

$$T : C^\infty(M) \ni f \to T_f \in \mathrm{End}(\Gamma_{hol}(L^n)) \quad \text{ただし } T_f\xi = \mathcal{P}f\xi \tag{1.2}$$

という写像が定義できます．T_f は Toeplitz operator と呼ばれ，この写像は Berezin-Teoplitz quantization map と呼ばれます [7, 8]．そこで，

$$T_f T_g = T_{f\star g} \tag{1.3}$$

で f, g の $\star$ 積を定義すると，これが変形量子化の意味での $\star$ 積になっていることが証明できます.

ただし，T_f は有限次元の行列なので，M の多くの性質が失われてしまっています．しかし，一方でプランク定数が $\hbar \sim \frac{1}{n}$ なので，n を十分大きくとると $C(M)$ のよい近次になっていることが分かります．いわゆる，ファジー球もこのようにして得られます.

代数レベルの変形量子化の問題は，シンプレクティック多様体の場合は，Fedosov [9], Maeda-Omori-Yoshioka [10], de Wilde-Lecomte [11] たちによって，その後に Kontsevich [12] によってポアッソン多様体の場合について肯定的に解かれました．つまり任意のポアッソン代数 $C^\infty(M)$ について変形量子化 $(C^\infty(M)[[\hbar]], \star_\hbar)$ が存在することが分かっています.

このほかに，量子空間としては最近提唱された，量子球 S^4_θ [13] や S^4_q [14] があります．S^4_θ やさらに高い次元の非可換球には，ある種の量子群の作用があることも知られており，q 量子球面 (Podleś の量子球面) や，量子群およびその商空間との関係が次第に明らかになってきています.

2 非可換微分幾何学

2.1 Connes の微分代数

Connes はこのような非可換代数を関数代数にもつような空間，非可換空間上の微分幾何学を定義しました [1]．これは，非可換幾何学のアイデアに従って，微分演算を関数代数の言葉を使って代数的に構成することによって実現できます．そこで，微分代数を関数代数の言葉に翻訳することから始めます．この際，代数の可換性を使わないことに注意します．もちろん，できあがった代数的方法を関数代数 $C(M)$ に適用すると元の微分幾何学を再現する必要があります.

このために，まず次の**普遍微分代数** (universal differential algebra) と呼ばれる代数を定義します．普遍微分代数というのは，代数の可換性は仮定しておらず，すべての微分代数のプロトタイプになりますが，それ自身は何の構造ももっていません．

定義 2.1　次の 1〜3 を満たす $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$ を**普遍微分代数**という．

1. p 形式とは $p+1$ 個の元を並べたものとする：

$$\Omega^p(\mathcal{A}) = \{\omega = a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_p,\ a_k \in \mathcal{A}\}. \tag{2.1}$$

2. 微分 $d\ :\ \Omega^p \to \Omega^{p+1}$ が定義されていて次の性質をもつ：

(a) $d\omega = da_0 da_1 \cdots da_p = \mathbf{1} \otimes \omega$,

(b) $d\mathbf{1} = 0$, [2]

(c) $a_k = \mathbf{1}$ ならば $a_0 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes \mathbf{1} \otimes a_{k+1} \otimes \cdots \otimes a_p = 0$．ただし，$k \neq 0$.

3. 2個の形式の積 $\Omega^p\Omega^q \to \Omega^{p+q}$ があり graded Leibniz rule

$$d(\omega_p\omega_q) = (d\omega_p)\omega_q + (-1)^p\omega_p(d\omega_q) \tag{2.2}$$

が成り立つ．[3]

Connes の微分代数 $\Omega_D^\bullet(\mathcal{A})$ は上の普遍微分代数を適当なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ 上で表現することで構成されます．まず，代数 $\mathcal{A}$ が，あるヒルベルト空間上で表現されているとし，その表現 π を普遍代数の表現にまで拡張するような方法で行うわけです．微分を表現するために，このヒルベルト空間上で

---

[2] $dd = 0$ は自動的に成り立つ．

[3] この積は，2個の微分形式の積を，Leibniz rule を使って $(ada')(bdb') = ad(a'b)db' - aa'dbdb'$ のように，標準形の和に書き直すに過ぎない．

定義されたディラック (Dirac) 作用素 D を与える必要があります．この 3 点セット $(\mathcal{A}, \mathfrak{H}, D)$ のことを spectral triple と呼びます．

まず，ディラック作用素 D を使って 1 形式を

$$d\pi(a) \equiv \pi(da) = [D, \pi(a)] \tag{2.3}$$

と定義します．すると，一般の 1 形式は，$\pi(\Omega^1) \ni \pi(\omega) = \sum_\lambda \pi(a_\lambda)[D, \pi(b_\lambda)]$ と書けます．ここで，λ は，適当な有限個の集合に値をもつ．同様にして，一般の p 形式は

$$\pi(\omega_p) = \sum_\lambda \pi(a_{\lambda_0})[D, \pi(a_{\lambda_1})] \cdots [D, \pi(a_{\lambda_p})] \tag{2.4}$$

と表現されることになります．その微分は，

$$d\pi(\omega_p) = \sum_\lambda [D, \pi(a_{\lambda_0})][D, \pi(a_{\lambda_1})] \cdots [D, \pi(a_{\lambda_p})] \tag{2.5}$$

で定義することになります．ここで，d は形式的に一番最初の元だけを微分しており，$[D, \pi(\omega)]$ ではないことに注意してください．この定義では，$d1 = [D, 1] = 0$ とすることによって $d^2 = 0$ は自動的に満たされることになります．

この定義は簡単なようですが，問題は

$$\pi\Big(\sum_\lambda a_\lambda db_\lambda\Big) = \sum_\lambda \pi(a_\lambda)[D, \pi(b_\lambda)] = 0 \tag{2.6}$$

を満たすような元が一般に存在しうるが，このとき

$$\sum_\lambda [D, \pi(a_\lambda)][D, \pi(b_\lambda)] \neq 0 \tag{2.7}$$

となることが一般にありえることにあります．通常の微分では，(2.7) は明らかにゼロにならなければならない関係です．Connes は，このような元を単に捨てることによって，通常の微分代数と等価なものを得ることができること

を示しました．つまり，表現をとるとゼロになるような元全体を $J = \ker \pi$ とすると

$$\pi(\Omega_D^\bullet) = \pi(\Omega^\bullet)/\pi(dJ) \tag{2.8}$$

または，$\Omega_D^\bullet = \Omega^\bullet/(J + dJ)$ とすると，微分代数を得ることができるわけです．$J + dJ$ は微分イデアルと呼ばれ両側イデアルになっていることから，この同値関係が意味をもつことになります．特に，$D = \not{\partial}$，$\mathcal{A} = C(M)$，$\mathfrak{H} = \Gamma(S)$ とすると $\Omega_D^p = \Lambda^p$，つまり通常の多様体 M 上の微分形式 Λ^p と一致します．

大切なことは，定義から分かるように代数の可換性を仮定していないので，このまま非可換代数に適用することができることです．これが，Connes の非可換微分代数と呼ばれるものです．このようにして，いくつかの非可換空間上の微分幾何学が構成されています．特に非可換トーラスに関しては，Connes-Rieffel によって詳しく調べられました [15]．この結果は，Matrix 理論 [16, 17] のコンパクト化の解として自然に実現されることが [18] によって発見されています．一方，ファジー球面に関しても微分代数が調べられており [19]，同様に S^3 中の D-brane のある種の極限の有効理論として，実現されることが示されています [20].

2.2　N 点空間上の微分幾何学

以上のような微分代数を具体的に量子空間に適用してみればよいのですが，どの量子空間をとってもそれの説明だけで長くなってしまいますので，ここでは N 点空間上の微分幾何学 [21] を例に代数化の方法について考えてみたいと思います．この例は，Connes の微分代数と，ディラック作用素の取り方の関係を理解するうえでよい例になっていると同時に，格子ゲージ理論の非可換幾何学的構成につながります．

N 点空間上の関数代数 $\mathcal{A} = C(N\mathrm{pt})$ は，点を j でラベルすると

$$e_i(j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, N \tag{2.9}$$

で与えられる N 個の関数 e_j を基底とする空間で，

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_i f_i e_i, f_i \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C}^N \tag{2.10}$$

となります．これらの関数の間には，次の $\tilde{J}^0$ で与えられる関係が成立します：

$$\tilde{J}^0 = \left\{ e_i e_j = \delta_{ij} e_j \quad \text{かつ} \quad \sum_i e_i = \mathbf{1} \right\}. \tag{2.11}$$

これに，対応して一般の 1 形式は，$d\tilde{J}^0$ が消えるという条件を満たす必要があります．この条件は微分の間に

$$de_i e_j + e_i de_j = \delta_{ij} de_j, \qquad \sum_i de_i = 0 \tag{2.12}$$

という関係を要請します．N 点空間の場合，具体的な代数の表現を考える前に，このように普遍微分代数に $\tilde{J}^0$ との整合性を要請すると，微分代数のレベルでさらに話を進めることができます．そこで，このようにして決まる微分代数を普遍 N 点微分代数と呼び，$\tilde{\Omega}^\bullet(N\mathrm{pt})$ と表すことにします．

命題 2.1 $\tilde{\Omega}^1(N\mathrm{pt})$ の基底は，$e_{ij} = e_i de_j$, $i \neq j$ である．

（証明） すべての 1 形式は e_{ij} で展開できることを示せばよい．(2.12) より，1 形式は de_j，$e_i de_i$ と e_{ij} で尽きる．そこで，de_j と $e_k de_k$ が e_{ij} で展開できることを示せばよい．まず，$e_k de_k$ は

$$e_k de_k = -e_k d(1 - e_k) = -e_k \sum_{j \neq k} de_j = -\sum_{j \neq k} e_{kj} \tag{2.13}$$

と表現できる．さらに

$$de_k = (1 - e_k) de_k + e_k de_k$$

$$= \sum_{j \neq k} e_j de_k - \sum_{j \neq k} e_{kj} = \sum_{j \neq k} (e_{jk} - e_{kj}) \tag{2.14}$$

である. *q.e.d.*

この関係を使うと，一般の関数 $f = \sum f_i e_i$ の微分が $df = \sum_i f_i de_i = \sum_i \sum_{k \neq i} f_i (e_{ki} - e_{ik}) = \sum_{i,j,i \neq j} (f_i - f_j) e_{ji}$ から

$$df = \sum_{i,j,i \neq j} (f_i - f_j) e_{ji} \tag{2.15}$$

のように書けることが分かります.

この結果は，すべての点の間の差分が微分係数として同等に出てくることを表しています. つまり，この微分代数では，単なる点の集合という以外に構造がないと言えます. さらに，この構成から次の関係式が成り立つことが分かります.

命題 2.2

$$e_i e_{kj} = \delta_{ik} e_{kj} \quad \text{かつ} \quad e_{ik} e_j = \delta_{kj} e_{ij} \tag{2.16}$$

（証明） 第1式は明らか. 第2式は $i \neq k$ を考慮して，(2.12) を使うと

$$e_{ik} e_j = e_i de_k e_j = \delta_{kj} e_i de_j = \delta_{kj} e_{ij} \tag{2.17}$$

q.e.d.

高階微分　普遍微分の定義から明らかなように，p 形式 $\omega_p \in \tilde{\Omega}^p(N\mathrm{pt})$ は

$$e_{i_0 \ldots i_p} = e_{i_0} de_{i_1} \cdots de_{i_p} \tag{2.18}$$

で一般に展開できます. 一方，上の関係式 (2.16) から右辺には

$$e_{i_0 \ldots i_p} = e_{i_0 i_1} e_{i_1 i_2} \cdots e_{i_{p-1} i_p} \tag{2.19}$$

のように$p+1$個の点で決まるp形式だけが残り，それ以外はゼロになります．これは，それぞれe_{ij}の積の部分で$e_{ij}e_{kl}=e_{ij}e_je_{kl}=\delta_{jk}e_{ij}e_{kl}$が成り立つことより明らかです．よって，一般の$p$形式$\omega_p\in\tilde{\Omega}^p(N\mathrm{pt})$は

$$\omega_p=\sum f_{i_0\cdots i_p}e_{i_0\ldots i_p},\qquad f_{i_0\cdots i_p}\in\mathbb{C} \tag{2.20}$$

で与えられます．

このような空間に意味のある微分幾何学的構造を入れることは，実際に代数の表現を求めディラック作用素を決めてやることによって実現されます．そこで，まず$\tilde{\Omega}^\bullet(N\mathrm{pt})$の表現を導入しておきます．

定義 2.2　表現$\pi:\mathcal{A}\to M_N(\mathbb{C})$を次のように定める．

代数$\mathcal{A}$の元は対角行列で

$$\pi(e_i)=\begin{pmatrix}0 & & \cdots & & 0\\ \vdots & \ddots & & & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & & \cdots & & 0\end{pmatrix} \tag{2.21}$$

とする．

このように関数を表現すると，$\tilde{\Omega}^1$の表現は，(2.16) を満たすことから$\pi(e_{ij})_{lm}=\delta_{li}\delta_{mj}$となることが分かります．このとき，基底$e_j$の微分は

$$de_i=\begin{pmatrix}0 & 0\cdots & 1 & 0\cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0\cdots & 1 & 0\cdots & 0\\ -1 & \cdots-1 & 0 & -1\cdots & -1\\ 0 & & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots 0 & 1 & 0\cdots & 0\end{pmatrix} \tag{2.22}$$

と表現されます．この微分はディラック作用素を

$$D = \sum_{ij} \pi(e_{ij}) \tag{2.23}$$

としたときの微分代数に相当することが簡単に確認できます．(以下では表現の π を混乱がない限り落とすことにする.) 実際に，

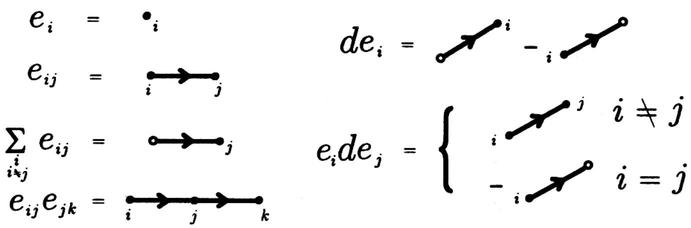
$$df = [D, f] = \sum f_k \Big[\sum_{ij} e_{ij}, e_k \Big] = \sum_k \sum_{i \neq k} f_k (e_{ik} - e_{ki}) \tag{2.24}$$

となって，確かに一致しています．さらに，高階の微分は

$$e_{i_0} de_{i_1} \cdots de_{i_p} = e_{i_0}[D, e_{i_1}] \cdots [D, e_{i_p}] \tag{2.25}$$

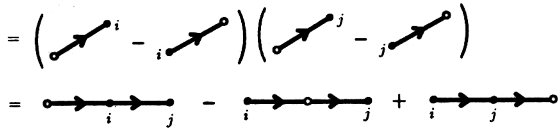
で与えられます．これを，具体的に行列の積として計算すると確かに，$e_{i_0 \ldots i_p} = e_{i_0 i_1} e_{i_1 i_2} \ldots e_{i_{p-1} i_p}$ だけが残ることが分かります．

さらに高階微分の構造を見るには，グラフによる表示を行うのが便利です．それぞれの点を $\bullet_i$ で表し，e_{ij} を i から j への矢印で表します．さらに，終点または始点をすべての点 i について加えた場合 $\sum_i \bullet_i = \circ$ で表すことにします．



この表示を使うと，p 形式，$e_{i_0 \ldots i_p}$ は，点 i_0 を始点にして，順に i_k に矢印を書き，i_p が終点になるグラフに対応することになります．グラフを使えば高階微分は，次の図のように計算できます．

$$de_{ij} = de_i\, de_j$$



$$= \sum_k \left(e_{kij} - e_{ikj} + e_{ijk} \right)$$

これらを続けることにより

$$\begin{aligned} de_{ij} &= \sum_k (e_{kij} - e_{ikj} + e_{ijk}) \\ de_{ijk} &= \sum_l (e_{lijk} - e_{iljk} + e_{ijlk} - e_{ijkl}) \end{aligned} \tag{2.26}$$

等となることを示すことができます.

このようにして，最も一般的な N 点微分代数を構成することができましたが，すでに述べたように，$\tilde{\Omega}^\bullet(N\mathrm{pt})$ では N 個の点をすべて同等に扱っていてその意味で，何も構造がない単なる点の集まった空間としか見えません．また，この微分の定義では $\tilde{\Omega}^\infty$ まで存在します.

これ以外のさまざまな N 点空間上の微分幾何学は，ある特殊なディラック作用素を定めることによって実現されることになります．つまり，$\tilde{\Omega}^\bullet$ の $D = \sum_{ij} e_{ij}$ を何か別のものに置き換えるか，または制限することによって得ることができます[4]．ここでは，制限によって得られる例についてさらに議論することにします．これは，D に現れる e_{ij} を制限することによって実現されます.

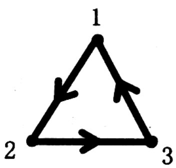
まず，制限された新しいディラック作用素 D を使って求められる 1 形式，$de_i = [D, e_i]$ は，(2.16) から D の定義に現れる e_{ij} のみで書けることが分かります．つまり，D の定義に現れない基底 e_{ij} がゼロになるという条件を

[4] たとえば，一般に重みをつけて $D = \sum \ell_{ij} e_{ij}$ とすることができるが，いまはすべての係数を 1 の場合のみを考える.

kernel J^1 として手で与えることで，微分幾何学をひとつ選び出していることになります．グラフを使うと，新しい D は，その定義に現れる e_{ij} に対応した矢印のみを残したグラフが対応します．そして，そのグラフに対応して，ひとつ微分幾何学が定まることになります．

高階の微分に関しても，この1形式に対する制限から生じる新しい kernel J^1 によって，一般の p 形式 (2.20) に制限が生じてきます．このような構成をいくつかの具体例で見てみましょう．

たとえば，3点の場合を考えてみます．まず，ディラック作用素を $D = e_{12}+e_{23}+e_{31}$ と制限します．これは1形式の空間を $\Omega^1 = \{ae_{12}+a'e_{23}+a''e_{31}\}$ に制限します．つまり $J^1 = \{e_{21} = 0, e_{13} = 0, e_{32} = 0\}$ という新しいイデアルを定めたことになります．このディラック作用素に対応するグラフは次のようになります．



このディラック作用素を使いながら，1形式を計算してみると

$$de_i = [e_{ij} + e_{jk} + e_{ki}, e_i] = e_{ki} - e_{ij} \qquad (i, j, k \text{ cyclic}) \tag{2.27}$$

となります．J^1 として捨てた1形式の微分は，たとえば

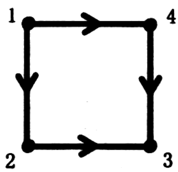
$$de_{21} = de_2 de_1 = (e_{12} - e_{23})(e_{31} - e_{12}) = -e_{231} \in dJ^1 \tag{2.28}$$

となります．この結果，2形式に関しては，dJ^1 からくる新しい関係が入ることが分かります．たとえば，$e_{21} = 0$ なので

$$de_{21} = -e_{231} = 0 \tag{2.29}$$

このようにして，$dJ^1 = \{e_{123}, e_{231}, e_{312}\}$ を得ます．もともとディラック作用素に関する制限から p 形式には $e_{321}, e_{213}, e_{132}$ は存在しないので，結果としてこの場合 2 形式は存在しないことになります．

次に，もう少し複雑で次の格子理論につながる例として 4 点の場合を考えましょう．今度は，ディラック作用素として $D = e_{12} + e_{23} + e_{14} + e_{43}$ をとります．これに対応したグラフは次のようになります．



そこで，1 形式を公式に従って計算すると

$$de_1 = -(e_{12} + e_{14}), \quad de_2 = e_{12} - e_{23},$$
$$de_3 = e_{23} + e_{43}, \quad de_4 = e_{14} - e_{43} \tag{2.30}$$

となります．D に現れない e_{ij} すべてについて kernel 条件を議論しなければならないのですが，結果的に 2 形式として現れるのは，e_{123} と e_{143} のみで他は D に関する条件からゼロになることが分かります．これは，図を見ると明らかです．2 形式は一般に二つのつながった矢印からなるわけですが，e_{123} と e_{143} 以外では矢印がつながりません．

唯一，非自明な条件は $e_{13} = 0$ に対する differential kernel の条件で

$$de_{13} = de_1 de_3 = -(e_{12} + e_{14})(e_{23} + e_{43}) = -e_{123} - e_{143} \in dJ^1 \tag{2.31}$$

という関係を導きます．これは $e_{123} = -e_{143}$ を意味するので，2 形式としては e_{123} が存在することになります．

グラフを使った解析を行うと，この性質は簡単な法則で与えられることが分かります．いまの場合，de_{13} の右辺に現れるのは，点 1 と 3 を結ぶ矢印に相当する 2 形式であることが分かります．もし，この path が唯一つ決まれ

ば右辺には，その項ひとつしかなく，よってその path に相当した 2 形式が kernel 条件から消えることになります．一般にある 2 点を結ぶ，$p-1$ 個のつながった矢印の path がなく (つまり対応した $p-1$ 形式が J^{p-1} の元であり)，その 2 点を結ぶ p 個の矢印の作る path が 1 通りしか存在しないとき，それに対応した p 形式は存在しない（つまり dJ^{p-1} に属する）ことが言えます．

2.3　格子の場合

1 次元の格子 (Lattice) の微分幾何学は N 点空間に，ディラック作用素として $D=\sum_i e_{i,i+1}$ を採用することで定義できます．ただし，ここでは $N\sim\infty$ とし，関数として無限遠で，つまり $|i|$ が大きなところで十分早く落ちるクラスの関数 $C_0(\mathbb{Z})$ を考えることにします．いま，格子間隔を a とし，格子上の点を座標関数 x：

$$x=a\sum je_j \tag{2.32}$$

で表します．つまり，点 k の座標は $x(k)=ka$ になります．この x の微分は

$$dx=[D,x]=a\sum_i e_{i,i+1}=aD \tag{2.33}$$

で与えられます．よって

$$\begin{aligned} df &= \Big[D,\sum f(x(i))e_i\Big]=\sum_i(f(x(i+1))-f(x(i)))e_{i,i+1} \\ &= \frac{1}{a}(f(x+a)-f(x))a\sum_i e_{i,i+1}=(\partial_+f)(x)dx \end{aligned} \tag{2.34}$$

さらに

$$\begin{aligned} dxx &= \Big(a\sum_i e_{i,i+1}\Big)\Big(a\sum je_j\Big) \\ &= \Big(a\sum_i e_{i,i+1}\Big)a(i+1)=(x+a)\Big(a\sum_i e_{i,i+1}\Big) \end{aligned} \tag{2.35}$$

なので，一般に

$$dxf(x) = f(x+a)dx \tag{2.36}$$

が成り立ちます．このことから，このディラック作用素の取り方により，この N 点空間は，1次元格子と同じ構造をもち，微分はそれぞれ隣り合う点の間の差分で $df = \partial_+ f dx = dx\partial_- f$ と書けることが分かります．ただし，$\partial_\pm f = \pm\frac{1}{a}(f(x \pm a) - f(x))$ です．ここで考えているディラック作用素は，すべての点が直線的に矢印でつながれたグラフに対応しており，任意の2点を結ぶ path は一つしかないので，2形式以上の高階の形式は存在しません．

この微分代数は，ディラック作用素がエルミートになっていません．これは，スピノルと組み合わせることによって回避できますが，その場合高階の微分の構造が変わってきます．

一方で，このような微分代数は，高次元に自然に拡張することができます．特に以下で見るように，Q 次元においては $Q+1$ 形式以上が存在しないことが示せ，このように定義した N 点上の微分幾何学には自然な次元が入っていることが分かります．また，格子ゲージ理論との相性が非常によいので少し，この先の議論を紹介することにします．

Q 次元の場合　Q 次元の場合は，N^Q 点空間を考えることになります．関数の基底は, $\vec{i} \in \mathbb{Z}^Q$ として，$C(\mathbb{Z}^Q) \ni e_{\vec{i}} = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_Q}$ になります．習慣に従って，座標関数 $x^\mu(\vec{i}) : \mathbb{Z}^Q \to \mathbb{R}$ を

$$C(\mathbb{Z}^Q) \ni x^\mu = \overbrace{\mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}}^{\mu-1\text{ 個}} \otimes \sum_{i_\mu} a i_\mu e_{i_\mu} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \tag{2.37}$$

のように導入します．すると，一般の関数は $f(x^\mu) = \sum f(x^\mu(\vec{i}))e_{\vec{i}}$ と表せます．ただし, $f(x^\mu(\vec{i})) \in \mathbb{C}$.

ディラック作用素は

$$D = \sum_\mu D^\mu = \sum_\mu \Big(\sum_{\vec{i}} e_{\vec{i},\vec{i}+\hat{\mu}} \Big) \tag{2.38}$$

ただし，$\hat{\mu} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ は μ 方向の単位ベクトルです．これにより，$dx^\mu = [D, x^\mu] = aD^\mu$ となることが分かります．

x^μ の定義より $x^\mu dx^\nu = dx^\nu x^\mu + a\delta_{\mu\nu} dx^\nu$ を得るので，1 次元のときの拡張として一般に

$$\begin{aligned} dx^\mu f(x) &= f(x + a\hat{\mu}) dx^\mu \\ df &= (\partial_\mu^+ f) dx^\mu = dx^\mu \partial_\mu^- f \end{aligned} \tag{2.39}$$

が成立します．4 点空間の 2 形式の解析 (2.31) と同様に $de_{\vec{i},\vec{i}+\hat{\mu}+\hat{\nu}}$ に対する kernel 条件から $e_{\vec{i}} de_{\vec{i}+\hat{\mu}} de_{\vec{i}+\hat{\mu}+\hat{\nu}} = -e_{\vec{i}} de_{\vec{i}+\hat{\nu}} de_{\vec{i}+\hat{\mu}+\hat{\nu}}$ となることが分かるので，これは

$$dx^\mu dx^\nu = -dx^\nu dx^\mu \tag{2.40}$$

を導きます．また，高階の微分に関してもいまの場合 dx^μ は反対称積で現れることが分かります．この議論から，高々 Q 形式までしか存在しないことも明らかでしょう．

Q 次元体積要素 (Volume form) の役割をするものとして，

定義 2.3　体積要素：

$$|D|^Q = D^1 D^2 \cdots D^\mu \cdots D^Q = dx^1 dx^2 \cdots dx^Q \tag{2.41}$$

と定義します．これは，基本 Q 形式のすべての点についての和になっています．これによってさらに，Hodge $\star$ の類推を

定義 2.4　Hodge $\star$：

$$dV = \frac{1}{k!} dx_{i_1} \cdots dx_{i_k} \star (dx^{i_1} \cdots dx^{i_k}) = |D|^Q \tag{2.42}$$

で定義します．この定義を使うと

$$\star(dx^{i_1}\cdots dx^{i_k})=\frac{1}{(n-k)!}\sum \epsilon^{i_1\ldots i_k}{}_{i_{k+1}\ldots i_Q}dx^{i_{k+1}}\cdots dx^{i_Q} \tag{2.43}$$

を得ます．ただし，p 形式と代数の元が非可換なので，$\star(f(x)\omega)=(\star\omega)f^\dagger(x)$ とします．これによって，p 形式の内積が

$$\langle\omega_p,\omega_p\rangle=(-1)^{p(Q-p)}\,\mathrm{tr}\left\{|D^\dagger|^Q(\star\omega_p)\omega_p\right\} \tag{2.44}$$

のように定義できます．ここで，$|D^\dagger|^Q$ はトレースをとるときに，体積要素を打ち消す役割をしています．

ゲージ理論　ここで以上のようにして定義された Q 次元格子の微分幾何学を使って，ゲージ理論を求めておくことにします．以下に見るように，結果として，いわゆる格子ゲージ理論の作用に帰着します．

ゲージ理論を定義するために，まず接続を 1 形式

$$\mathbf{A}(x)=A_\mu(x)dx^\mu=a\sum A_\mu(x(\vec{i}))e_{\vec{i},\vec{i}+\hat{\mu}} \tag{2.45}$$

で導入します．ただし，ここで考えている微分が差分に相当することから，接続 $\mathbf{A}$ は，ゲージ群のリー環に値をもちません．このことは，一般の場の変換をもとに議論すると明らかになります．いま，ある $\mathcal{A}$-module ψ を考え，場のゲージ変換を $\psi'=U\psi$ とします．通常の場合のように，場の共変微分 $(d+\mathbf{A})\psi$ のゲージ変換は $U(d+\mathbf{A})\psi=(d+\mathbf{A}')U\psi$ と定義するので，ゲージ変換は

$$\mathbf{A}'=U(dU^{-1})+U\mathbf{A}U^{-1}=U(D+\mathbf{A})U^{-1}-D \tag{2.46}$$

で与えられます．いま $\hat{\mathbf{A}}=D+\mathbf{A}$ と定義すると，式 (2.46) は $\hat{\mathbf{A}}'=U\hat{\mathbf{A}}U^{-1}$ と書けます．そこで $\hat{\mathbf{A}}=G_\mu(x)D^\mu$ とすると，上のゲージ変換は $G_\mu(x)$ に対して $G'_\mu(x)=U(x)G_\mu(x)U^{-1}(x+a\hat{\mu})$ となります．共変微分は

$$\nabla_\mu\psi(x)dx^\mu\equiv(d+\mathbf{A})\psi(x)=\hat{\mathbf{A}}\psi(x)-\psi(x)D$$

$$= (G_\mu(x)\psi(x+a\hat{\mu}) - \psi(x))D^\mu \tag{2.47}$$

となります．よって，$G_\mu(x)$ は，x と $x+a\hat{\mu}$ の平行移動による場のずれを与えていると考えられます．そこで，G_μ はゲージ群の元にとります．

共変微分が定義されたので，曲率を求めると

$$\Theta = d\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \frac{1}{2a^2}[G_\mu(x)G_\nu(x+a\hat{\mu}) - (\mu \leftrightarrow \nu)]dx^\mu dx^\nu \tag{2.48}$$

を得ます．作用は，ゲージ不変な 2 次の量として一般論に従って得ることができます：

$$\begin{aligned}\langle\Theta,\Theta\rangle &= \mathrm{tr}\,\{|D^\dagger|^Q(\star\Theta)\Theta\} \\ &= \frac{1}{a^4}\,\mathrm{tr}\,\{1 - G_\nu^\dagger(\vec{i}+\hat{\mu})G_\mu^\dagger(\vec{i})G_\nu(\vec{i})G_\mu(\vec{i}+\hat{\nu})\}\end{aligned} \tag{2.49}$$

これは，通常の格子理論における Yang-Mills 場の作用に他なりません．このようにして，非可換微分代数を使って，格子理論を構成することができることが分かりました．このような微分代数を拡張することによって，格子理論における Anomaly の系統的な構成法も提唱されています [22].

3　まとめと最近の発展について

この稿では紙面の都合上，話は非可換幾何学のごく最初の部分に限られてしまいました．また，対象としている空間も N 点空間に限っているので非可換幾何学というには単純すぎますが，代数化のアイデアや非可換微分幾何の特徴が少しでも伝わればと思います．この後，非可換空間上の場の理論を構築していくには，ここで紹介した非可換微分幾何学の手法を，知られている非可換空間または量子空間といった系に適用することが次のステップということになります．さらに，ゲージ理論を理解するためには非可換空間上のベクトルバンドルを定義する必要があります．これは代数的には射影加群

を作っていくことになり，これらが非可換空間上のインスタントン解やモノポール解等を構成することと等価になります [23, 24, 25]．物理的にもこのような通常古典解と呼ばれる場の理論の解が真空の構造の研究で重要な役割を果たします．

最後に，最近の発展について少し紹介しておきたいと思います．現在，非可換幾何学の問題のなかで，最も関心をもたれている問題の一つに非可換多様体の確立があります．これは，物理的な立場から考えても，最初の節で述べたように重力の量子論的記述を完成させる目的を達成するには不可欠な概念です．

これを目標に現段階で行われている研究では，いわゆる非可換球面の研究が大きな位置を占めると思われます．ここで言う非可換球面は Connes-Landi の非可換 S^4_θ を皮切りに始まり構成されていった一連の非可換球面とその上の微分幾何学のことを意味します [26]．Connes-Landi の非可換球面はある種の量子群が作用する空間であることが分かっています [27]．その交換関係は 4 次元球面がシンプレクティック多様体でないことから，なにか singular なポアッソン構造に基づくものと想像がつきますが，このことはその構造が量子群に似たものになることと合致するものです．

一方で，やはり同様の球面としていわゆる Podleś の 2 次元球面があります [28]．これは，量子群 $SU_q(2)$ と深い関係にあることが知られています．また，量子群 $SU_q(2)$ 自体も非可換 S^3 と考えることができます [29]．しかし，このような以前から知られていた量子群に関連する非可換空間は非可換多様体の非常に豊富な例を与えているはずなのですが，その座標関数の交換関係がいわゆる q 変形された交換関係になることから，非常に取り扱いにくい対象になっています．特に，この解説で紹介した Connes の非可換微分幾何学を適用するのに不可欠なディラック作用素の存在が疑問視されていました．このことが，量子球面の非可換多様体としての研究をかなり困難なものにし

ているわけですが，最近になって，この状況が少し変化してきました．まず，Podleś の量子球面上のディラック作用素が構成されその存在が証明されました [30, 31]．また，量子群 $SU_q(2)$ 上のディラック作用素の構成も可能になってきたことが報告されています [32]．

このような発展は，我々の知っている豊富な量子群やその商空間として記述される非可換多様体の例が非可換微分幾何学の対象として取り上げることが可能になってきたことを意味します．これに伴い，非可換多様体の理解がより一層進むことになると思われます．このような研究が進むにつれて，弦理論の幾何学的枠組みとしてどのような構造をもっている非可換幾何学が望ましいかが，次第に明らかになってくるでしょう．また，弦理論に限らずとも一般に量子重力というもののもつ幾何学的構造の理解を深めるための大きな手がかりになることは間違いないでしょう．

参考文献

[1] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, New York, 1994.

[2] G. Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and Their Geometries*, Springer, 1997.

[3] R.J. Szabo, Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces, hep-th/0109162.

[4] T. Yoneya, String Theory and Gravitation – Towards Quantum Gravity –, Prog. Theor. Phys. Supple. **144** (2001), 176–194.

[5] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, Deformation theory and quantization I, II, *Ann. Phys.* **111** (1977), 61–151.

[6] F.A. Berezin, Quantization, *Math. USSR-Izv.* **8** (1974), 1109–1165.

[7] M. Schlichenmaier, Berezin-Toepliz quantization and Berezin symbols for arbitrary compact Kähler manifolds, math.QA/9902066.

[8] A.V. Karabegov and M. SchlichenMaier, Identification of Berezin-Toeplitz deformation quantization, math/0006063.

[9] B.V. Fedosov, A simple geometric construction of deformation quantization, *J. Diff. Geo.* **40** (1994), 213–238.

[10] H. Omori, Y. Maeda and A. Yoshioka, Weyl manifolds and deformation quantization, Advances in Math **85** (1991), 224–255; Existence of closed star-products, *Lett. Math. Phys.* **26** (1992), 284.

[11] M. De Wilde and P.B.A. Lecomte, Existence of star products and of formal deformations of the Poisson-Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds, *Lett. Math. Phys.* **7** (1983), 487–496.

[12] M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, I, q-alg/9709040.

[13] A. Connes and G. Landi, Noncommutative Manifolds the Instanton Algebra and Isospectral Deformations, math.QA/0011194.

[14] L. Dabrowski, G. Landi and T. Masuda, Instantons on the Quantum 4-Spheres S_q^4, math.QA/0012103.

[15] A. Connes and M. Rieffel, Yang-Mills for noncommutative two-tori, *Contemp. Math. Oper. Algebra. Math. Phys.* **62** (1987), AMS, 237–266.

[16] T. Banks, W. Fischler, SH. Shenker and L. Susskind, M theory as a matrix model, *Nucl.Phs.* **B497** (1997), 41–55.

[17] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, A large-N reduced model as superstring, *Nucl. Phys.* **B498** (1997), 467–491.

[18] A. Connes, M.R. Douglas and A. Schwarz, Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori, JHEP 9802 (1998)003.

[19] U. Carow-Watamura and S. Watamura, Noncommutative Geometry and Gauge Theory on Fuzzy Sphere, *Commun. Math. Phys.* **212** (2000), 395–413.

[20] A. Yu. Alekseev, A. Recknagel and V. Schomerus, Non-commutative world-volume geometries: Branes on $SU(2)$ and fuzzy spheres, JHEP 9909 (1999) 023, hep-th/9908040.

[21] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, Some Aspects of Noncommutative Geometry and Physics, Physics/9712004.

[22] T. Fujiwara, H. Suzuki and K. Wu, *Phys. Lett.* **B463** (1999), 63–68; *Nucl. Phys.* **B569** (2000), 643–660.

[23] N. Nekrasov, Trieste Lectures on solitons in noncommutative gauge theories, hep-th/0011095.

[24] M. Hamanaka, Noncommutative Solitons and D-branes, hep-th/0109070.

[25] U. Carow-Watamura, H. Steinacker and S. Watamura, Monopole Bunble over Fuzzy Complex Projective Space, hep-th/0404130 to be published in Journal of Geometry and Physics, (2004).

[26] L. Dabrowski, The Garden of Quantum Spheres, math.QA/0212264.

[27] A. Connes and M. Dubois-Violette, Noncommutative Finete-Dimensional Manifolds, I. Spherical Manifolds and Related Examples, math.QA/0107070.

[28] P. Podleś, Quantum Spheres, *Lett. Math. Phys.* **14** (1987), 521–531.

[29] S.L. Woronowicz, Twisted $SU(2)$ group. An example of a noncommutative differential calculus, Publ. RIMS, Kyoto University, **23** (1987), 117–181.

[30] L. Dabrowski and A. Sitarz, Dirac operator on the standard Podleś quantum sphere, Banach Center Publ. **61** (2003), 49–58.

[31] L. Dabrowski, G. Landi, M. Paschke and A. Sitarz, The Spectral Geometry of the Equtorial Podleś Sphere, math.QA/0408034.

[32] L. Dabrowski, G. Landi, A. Sitarz, W. van Suijlekom and J.C. Varilly, The Dirac operator on $SU_q(2)$, math.QA/0411609.

編者 河東泰之 （かわひがし・やすゆき）——東京大学大学院数理科学研究科

著者 有光敏彦 （ありみつ・としひこ）——筑波大学大学院数理物質科学研究科
有光直子 （ありみつ・なおこ）——横浜国立大学大学院環境情報研究院
小川知之 （おがわ・としゆき）——大阪大学大学院基礎工学研究科
木田重雄 （きだ・しげお）——京都大学大学院工学研究科
夏目利一 （なつめ・としかず）——名古屋工業大学大学院工学研究科
福本康秀 （ふくもと・やすひで）——九州大学大学院数理学研究院/宙空環境研究センター
盛田健彦 （もりた・たけひこ）——広島大学大学院理学研究科
綿村　哲 （わたむら・さとし）——東北大学大学院理学研究科

数理物理への誘い５——最新の動向をめぐって

2005年2月10日　初版第1刷発行

定価はカバーに
表示しています

編　者　河東泰之
発行者　西原昌幸
発行所　遊 星 社
164-0001 東京都中野区中野3丁目50-1
電話 (03)3381-5914　振替 00140-5-137657
発売元　星 雲 社
112-0012 東京都文京区大塚3丁目21-10
電話 (03)3947-1021　Fax (03)3947-1617

印刷・製本＝平河工業社　　ISBN4-434-05801-0